4.5 Secuencia de Fibonacci
Razón Áurea

Profa. Milena R. Salcedo Villanueva

Mate 3041

Secuencia de Fibonacci

Video relacionado con la secuencia de Fibonacci

https://www.youtube.com/watch?v=DKGsBUxRcV0

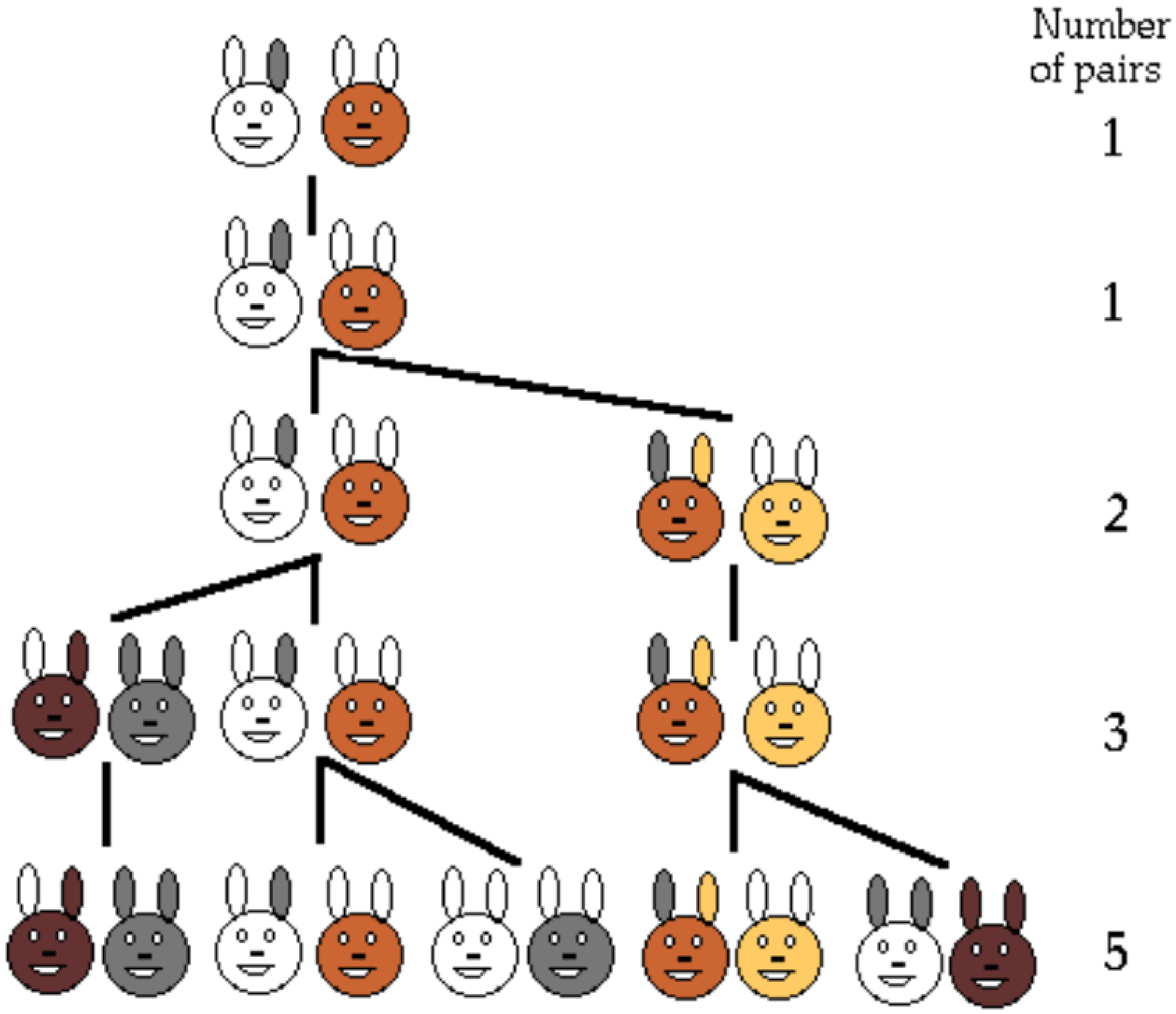
La secuencia de Fibonacci

Uno de los problemas más famosos de matemática elemental se encuentra en el libro *Liber Abaci*, escrito en 1202 por Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci.

Problema:

Un hombre colocó una pareja de conejos en una jaula. Durante el primer mes la pareja no se reprodujeron, pero cada mes a partir de entonces tuvieron una nueva pareja de conejos. Si cada nueva pareja se reproducía de la misma manera, ¿Cuántas parejas de conejos habrá al cabo de un año?

Solución:



Problema de Fibonacci

Mes	# de parejas al inicio	Nuevas parejas procreadas	Número de parejas al final del mes
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
		Total	

Secuencia de Fibonacci

La solución de este problema nos lleva a la secuencia de Fibonacci. Acontinuación se muestran los primeros 15 términos de la secuencia de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$$

Note que después de los dos primeros términos de la secuencia, cada término se obtiene sumando los dos términos anteriores. Lo cual describe una formula matemática llamada **fórmula de recursión**

Secuencia de Fibonacci

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$$
$$F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$$

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \qquad \text{para } n \geq 3$$

Secuencia de Fibonaci

La sucesión de Fibonacci es uno de los temas más sorprendentes de la Matemática, existen multitud de aplicaciones en los que aparece esa sucesión, existiendo una amplísima bibliografía dedicada exclusivamente al estudio de sus propiedades y aplicaciones.

La Razón Áurea

Si consideramos los cocientes de números de Fibonacci sucesivos, surge un patron.

$\frac{1}{1} = 1$ $\frac{5}{3} = 1.6666\ldots$ $\frac{21}{13} \approx 1.615384615$ $\frac{89}{55} \approx 1.618181818\ldots$

$\frac{2}{1} = 2$ $\frac{8}{5} = 1.6$ $\frac{34}{21} \approx 1.619047619$

$\frac{3}{2} = 1.5$ $\frac{13}{8} = 1.625$ $\frac{55}{34} \approx 1.617647059$

Si continuamos calculando los cocientes de números de Fibonacci consecutivos, se observa que tienden a aproximarse a un valor límite cerca de 1.618

La Razón Áurea

El cociente calculado entre dos números de Fibonacci consecutivos se aproxima al número **llamado de oro**:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \textit{conocido como la Razón áurea}$$

El cuál se simboliza con la letra griega ϕ (se lee fi).

Esta razón aparace una y otra vez en arte, arquitectura, música y la naturaleza. Sus origenes se remontan a los dias de los antiguos griegos, quienes pensaban que un rectángulo áureo tenía las proporciones estéticas mas agradables

Rectángulo Áureo

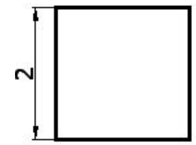
Se llama rectángulo áureo al que el cociente entre el valor del lado mayor entre el menor nos da el número de oro o cociente áureo ϕ.

Este es un rectángulo muy especial como veremos. Los griegos lo consideraban de particular belleza y lo utilizaron asiduamente en su arquitectura. Al parecer a la mayoría de las personas también les parece más agradable a la vista un rectángulo con esas proporciones entre sus lados

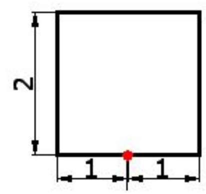
Ejemplo: Un rectángulo con dimensiones $30cm \times 48.54\ cm$ se considera un triángulo áureo por que al calcular el cociente del lado mayor entre el lado menor nos da: $\frac{48.54}{30} = 1.618 \approx \phi$

Como construir un triángulo Áureo

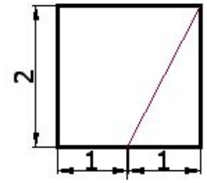
Dibuja un cuadrado cuyos lados midan 2 cm



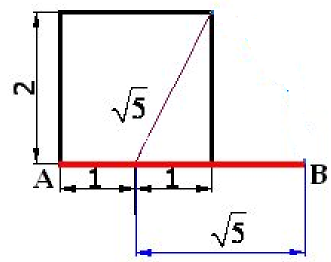
Halla el punto medio de la base.



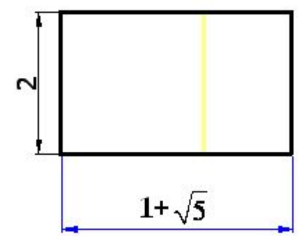
Calcule distancia del punto medio al vértice superior derecho, puedes usar teorema de pitágoras, o por construcción geométrica



Extiende la linea con magnitud $\sqrt{5}$ desde el punto medio de la base.



Ahora complete el rectángulo.

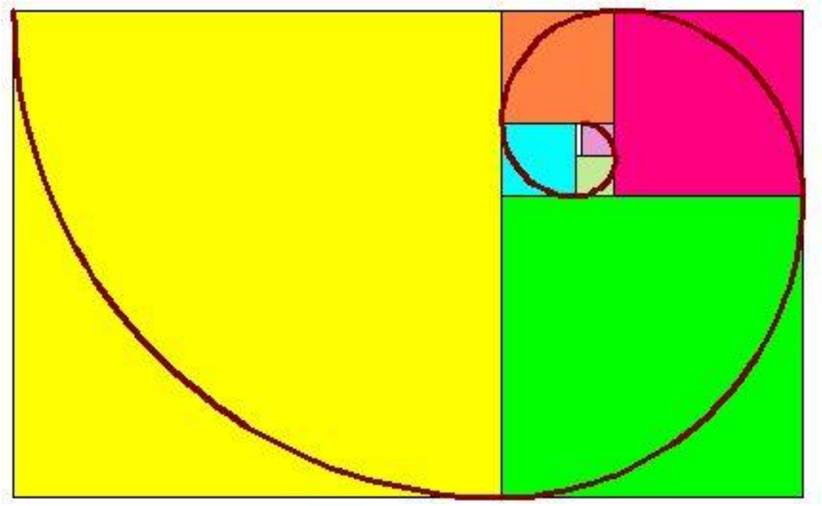


Divide el valor del lado mayor $\left(1+\sqrt{5}\right)$ entre el valor del lado menor (2)

Obtenemos razón áurea $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Espiral áurea

Uniendo rectángulos de dimensiones igual a los términos correlativos de la sucesión de Fibonacci, formamos la llamada espiral de Fibonacci



En cada cuadrado se traza el cuarto de círculo con centro uno de sus vértices y radio el lado